

## Урок по теме "Вычисление площадей . Применение интеграла"

**Тип урока:** урок оценки и коррекции знаний; повторения, обобщения, формирования знаний, умений, навыков.

### Цели урока:

- Обучающие: повторить теоретический материал; отработать навыки нахождения первообразных, вычисления интегралов и площадей криволинейных трапеций.
- Развивающие: развивать навыки самостоятельного мышления, интеллектуальные навыки (анализ, синтез, сравнение, сопоставление), внимание, память.
- Воспитательные: воспитание математической культуры учащихся, повышение интереса к изучаемому материалу.

### Ход урока

**Сообщение учащимся темы и целей урока.** (1 мин.)

**Проверка домашнего задания.** (4 мин.)

По готовому домашнему заданию (заранее решённому учителем на доске) выполнить самопроверку и поставить оценку в тетрадь, а также в оценочный лист:

Докажите, что функция  $F(x) = 3x^4$  есть первообразная для функции  $f(x) = 12x^3$  на промежутке  $(- ?; + ?)$ .

**РЕШЕНИЕ:** По определению первообразной  $F'(x) = f(x)$ . Значит,  $F'(x) = (3x^4)' = 3 \cdot 4 \cdot x^3 = 12x^3 = f(x)$  для всех  $x \in (- ?; + ?)$ .

2. Вычислите интеграл  $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(0,25x) dx$ .

**РЕШЕНИЕ:**

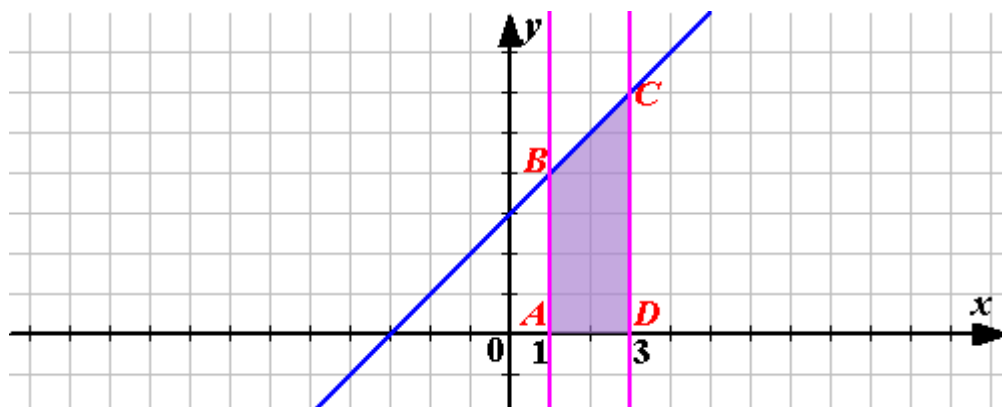
$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(0,25x) dx = 4 \sin(0,25x) \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = 4 \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

3. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x + 3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  и  $x = 3$ .

**РЕШЕНИЕ:**

Нарисуем линии, заданные уравнениями и заштрихуем криволинейную трапецию, площадь которой будем находить.

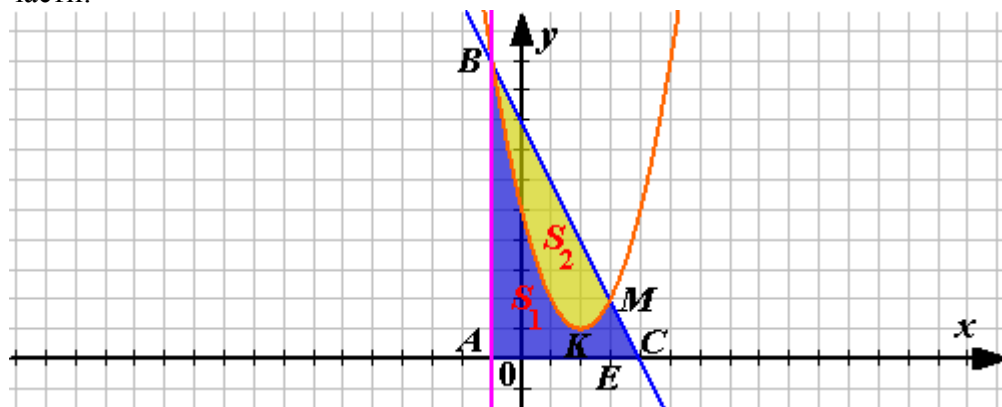
~ 2 ~



$$S_{ABCD} = \int_1^3 (x+3) dx = \left( \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^3 = 4,5 + 9 - \left( \frac{1}{2} + 3 \right) = 13,5 - 3,5 = 10.$$

Ответ: 10.

4. (дополнительное задание для сильных учащихся). Фигура, ограниченная линиями  $y = -2x + 8$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$ , делится линией  $y = x^2 - 4x + 5$  на две части. Найдите площадь каждой части.



**Решение:** Рассмотрим функцию  $y = x^2 - 4x + 5$ .

$y = x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1$ , т.е. графиком данной функции является парабола с вершиной  $K(2; 1)$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25.$$

$$S_{ABKME} = \int_{-1}^3 (x^2 - 4x + 5) dx = \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right) \Big|_{-1}^3 = 9 - 18 + 15 - \left( -\frac{1}{3} - 2 - 5 \right) = 6 + 7\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

$$S_1 = S_{ABKME} + S_{\triangle EMC}, S_1 = 13\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 14\frac{1}{3}.$$

$$S_2 = S_{\triangle ABC} - S_1, S_2 = 25 - 14\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ:  $10\frac{2}{3}$  и  $14\frac{1}{3}$ .

### 3. Задание на дом. ( 1 мин.)

Раздать карточки с домашним заданием (4-ое задание для более подготовленных учащихся).

1. Найти общий вид первообразных для функции  $y = x^3 + \frac{1}{x^2}$ .
2. Вычислите интеграл  $\int_0^2 4x^3 dx$ .
3. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ .
4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 1$  и  $y = 1 - x^2$ .

### 4. Повторение теоретического материала. (10 мин.)

Учащиеся задают вопрос и называют ученика, который будет отвечать на этот вопрос. Если ученик ответил правильно, то он должен задать свой вопрос и т.д. Если ответ не будет получен, то отвечать придётся тому ученику, который задавал вопрос. Учащиеся должны следить за тем, чтобы один и тот же вопрос не повторялся два раза и отвечающие тоже.

Перечень возможных вопросов:

- Сформулируйте признак постоянства функции.
- Сформулируйте основное свойство первообразной.
- В чём заключается геометрический смысл основного свойства первообразной?
- Сколько правил нахождения первообразных ты знаешь? Назови их.
- Дайте определение криволинейной трапеции.
- Сформулируйте теорему о площади криволинейной трапеции.
- Что называют интегралом?
- Запишите на доске формулу Ньютона-Лейбница и дайте объяснение каждой буквы.
- Где можно использовать применения интеграла?
- В чём заключается геометрический смысл интеграла?

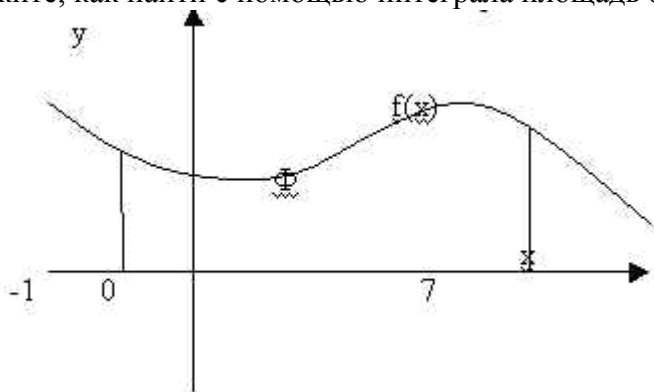
### 5. Устная работа. (9 мин.)

~ 4 ~

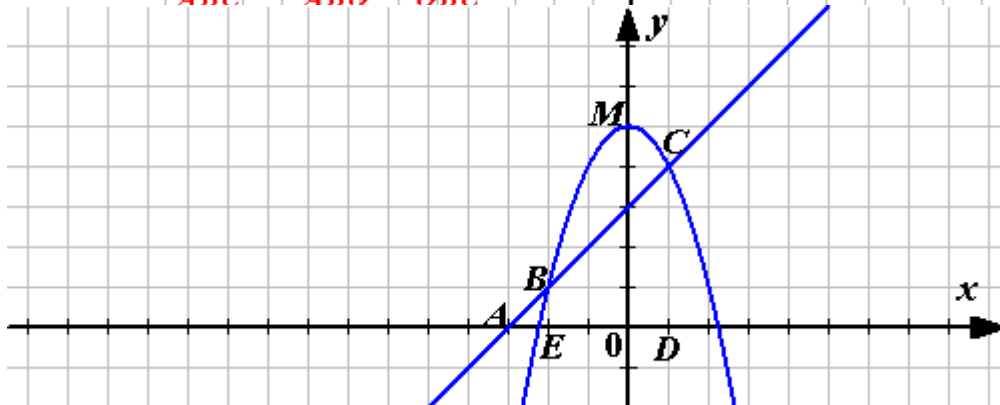
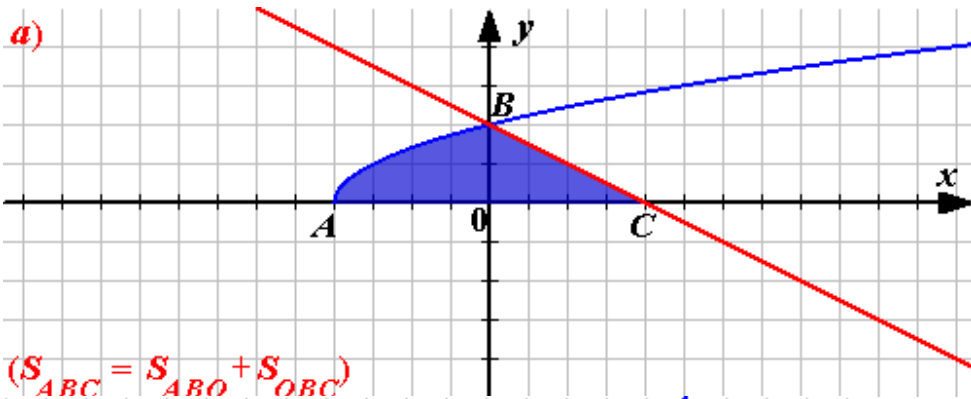
Какие из функций  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 4\sqrt{x}$ ,  $y = 2\sqrt{x} + 3$ ,  $y = \sqrt{x} - 1$  являются первообразными для функции  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  ?

Найдите общий вид первообразных для функций: а)  $y = 7,5$ ; б)  $y = \frac{1}{2}x + x^4$  ;  
в)  $y = 2 \sin x \cdot \cos x$ .

Скажите, как найти с помощью интеграла площадь фигуры Ф?

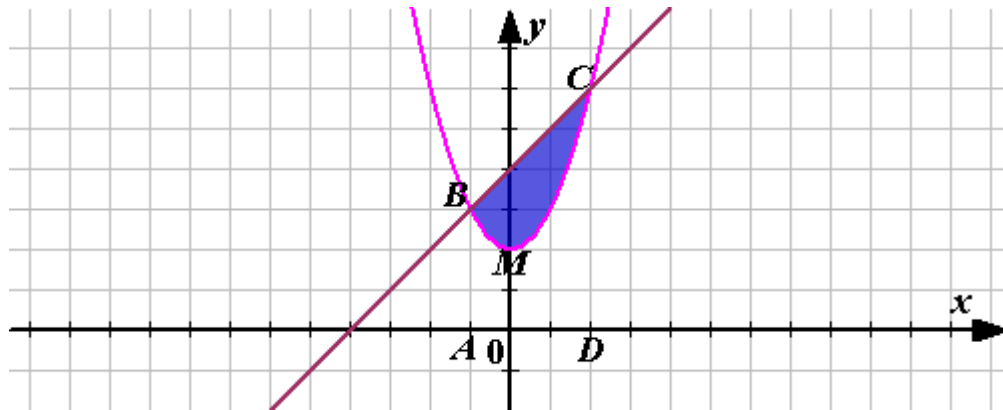


Представьте площадь заштрихованной фигуры как сумму или разность площадей Криволинейных трапеций, ограниченных графиками известных вам линий.

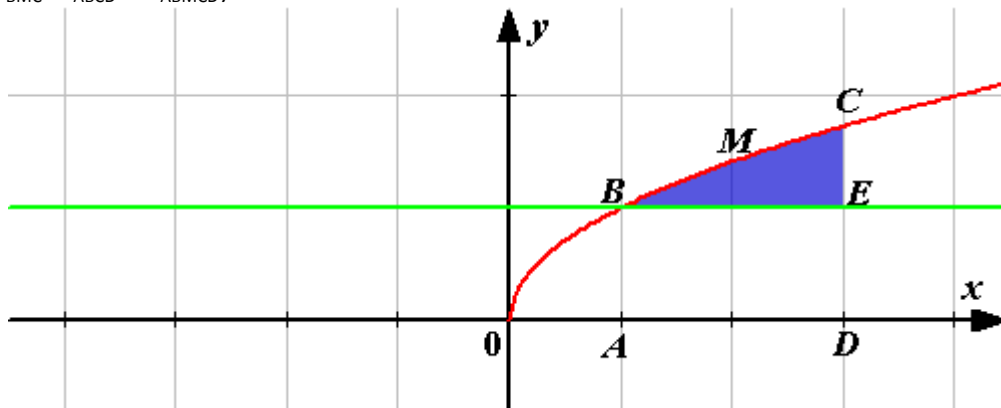


б)  $(S_{BMC} = S_{EBMCD} - S_{EBCD})$

~ 5 ~

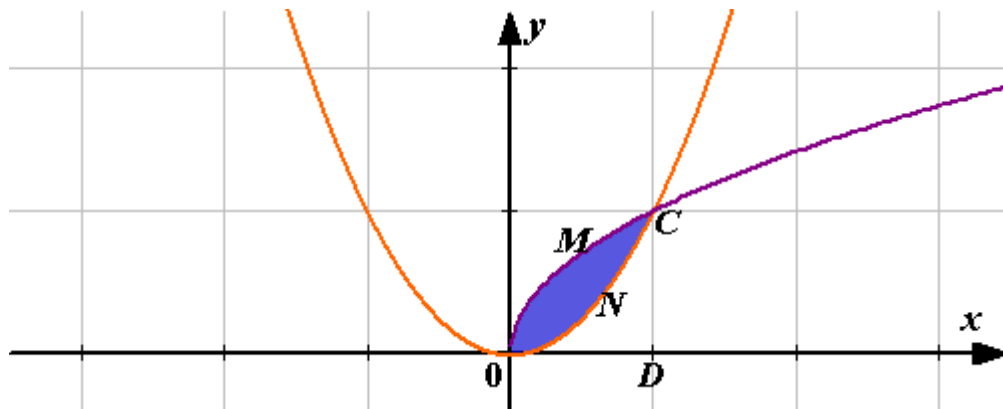


$$(S_{BMC} = S_{ABCD} - S_{ABMCD})$$



г)

$$(S_{BMCE} = S_{ABMCE} - S_{ABED})$$



$$S_{ONCD})$$

$$(S_{OMCN} = S_{OMCD} -$$

**6. Тренировочные упражнения (в форме теста) - 15 мин.**

Вычислить интеграл:

а)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ . Ответы: 1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 3)  $\frac{1}{2}$ ; 4)  $\sqrt{2}$ .

~ 6 ~

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^4}. \text{ Ответы: 1) } \frac{15}{8}; 2) \frac{15}{64}; 3) \frac{15}{16}; 4) \frac{7}{24}.$$

Выберите, для какой из функций функция  $F(x) = 2x + x^3$  является первообразной: а)  $f(x) = 2 + x^3$ ; б)  $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^4$ ; в)  $f(x) = 2 + 3x^2$ .

Индивидуальная работа по карточкам (для быстрой проверки карточки составляла таким образом, чтобы номер карточки совпадал с ответом)

Задание: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

- № 1.  $y = 2x, y = 0, x = 0, x = 1.$
- № 2.  $y = 2 - x^3, y = 1, x = -1, x = 1.$
- № 3.  $y = 5 - x^2, y = 2x^2 + 1, x = 0, x = 1.$
- № 4.  $y = 2\sin x, x = 0, x = \pi, y = 0.$
- № 5.  $y = 2x - 2, y = 0, x = 3, x = 4.$
- № 6.  $y = 3x^2 + 2, y = 0, x = -1, x = 1.$
- № 7.  $y = \frac{3}{2}x^2 + 1,5, y = 0, x = 0, x = 2.$
- № 8.  $y = \frac{16}{x^2}; y = 2x; x = 4.$
- № 9.  $y = x^2 + 2, y = 0, x = -1, x = 2.$
- № 10.  $y = 2x + 3, y = 0, x = 0, x = 2.$

**7. Работа в парах.** (по карточкам) - 10 мин.

Ваша задача состоит в том, чтобы каждый, работающий в паре был занят своей работой, а именно вычислением площади одной из криволинейных трапеций, из которых состоит заштрихованная фигура, и общими усилиями смогли бы вычислить площадь всей фигуры.

На доске учитель записывает схему, пустые клетки которой заполняются по мере выполнения задания (Схема может быть другой или их может быть несколько – по рядам или количеству работающих пар.):

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 38$$

**ОТВЕТ**

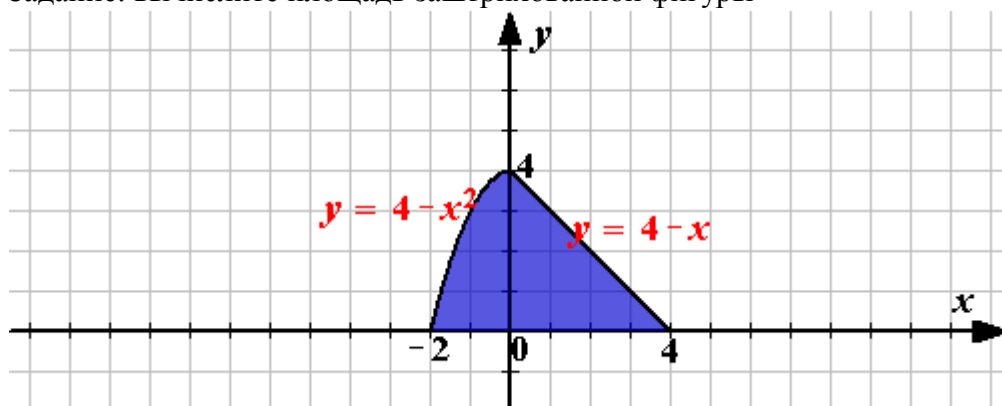
$$2\frac{2}{3} \quad 10\frac{2}{3} \quad 13\frac{1}{3} \quad 4\frac{2}{3} \quad 6\frac{2}{3}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 38$$

$$5\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} \quad 2\frac{2}{3} + 8 \quad 5\frac{1}{3} + 8 \quad 2 + 2\frac{2}{3} \quad 4 + 2\frac{2}{3}$$

### КАРТОЧКА ДЛЯ ПАРЫ №1

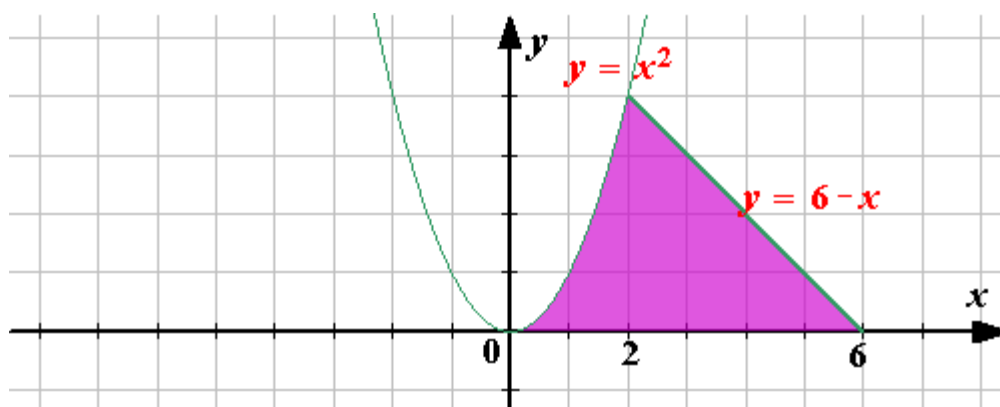
Задание: вычислите площадь заштрихованной фигуры



Например, первый ученик вычисляет площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=4-x^2$ ,  $y=0$  и  $x=0$ ; второй ученик вычисляет площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=4-x$ ,  $y=0$  и  $x=0$ . Каждый из них сообщает результаты учителю для заполнения схемы. Затем находят сложением своих результатов площадь всей фигуры и результат сообщают учителю.)

### КАРТОЧКА ДЛЯ ПАРЫ № 2

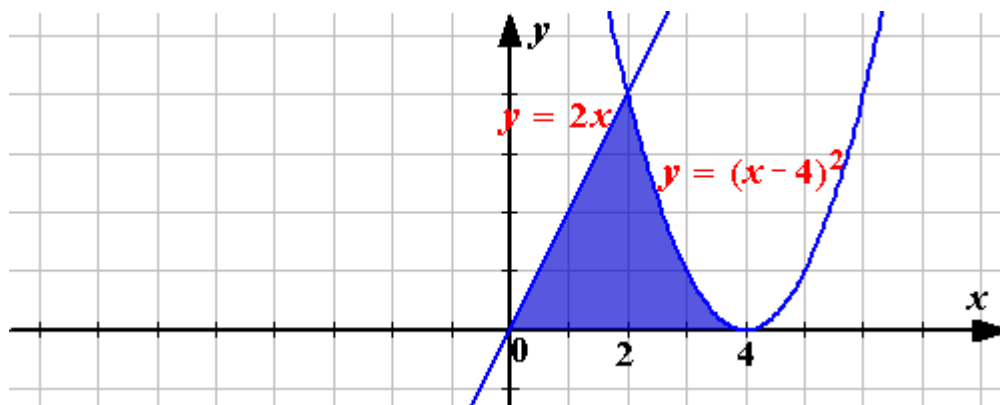
Задание: Вычислите площадь заштрихованной фигуры



### КАРТОЧКА ДЛЯ ПАРЫ № 3

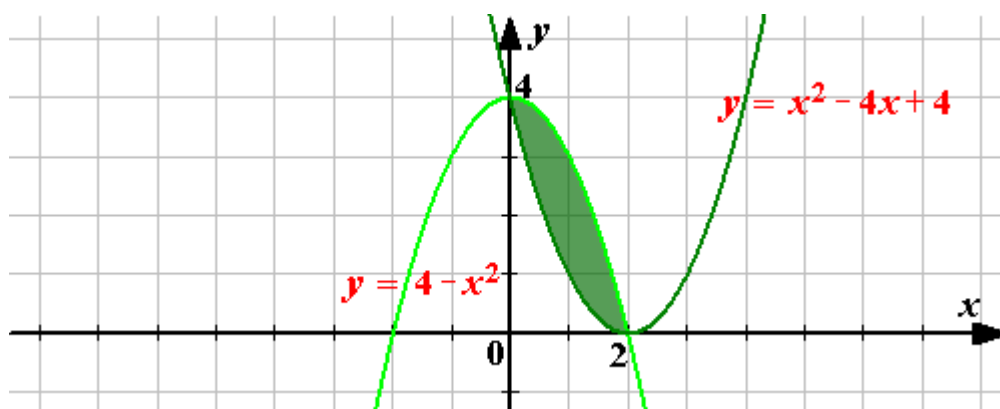
Задание: Вычислите площадь заштрихованной фигуры

~ 8 ~



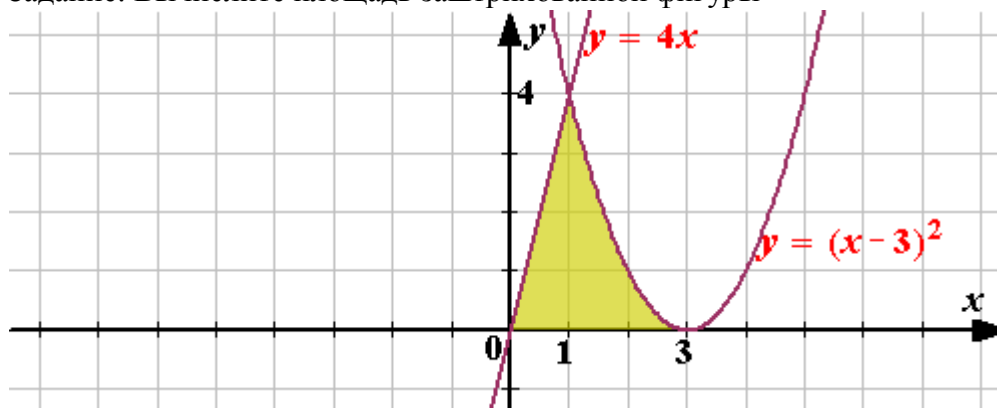
**КАРТОЧКА ДЛЯ ПАРЫ № 4**

Задание: Вычислите площадь заштрихованной фигуры



**КАРТОЧКА ДЛЯ ПАРЫ № 5**

Задание: Вычислите площадь заштрихованной фигуры





**Самостоятельная работа 20 мин.**

“5” - за верно решённые 1, 2 и 3<sub>б</sub>) задания

“4” - за верно решённые 1, 2 и 3<sub>а</sub>) задания

“3” - за верно решённые 1 и 2 задания

**Вариант – 1**

1°. Найдите общий вид первообразных для функций

а)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ ; б)  $f(x) = 3x^2 + 1$ .

2°. Вычислите интеграл: а)  $\int_{-1}^2 2x^3 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ .

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а)  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

б)  $y = 4 - x^2$  и  $y = x + 2$ .

**Вариант – 2**

1°. Найдите общий вид первообразных для функций

а)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+3}}$ ; б)  $f(x) = 4x^3 + 3$ .

2°. Вычислите интеграл: а)  $\int_0^2 10x^4 dx$ ; б)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ .

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а)  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

б)  $y = 4 - x^2$  и  $y = 2 - x$ .

**9. Взаимопроверка 5 мин.**

Учащимся предлагается поменяться тетрадями и проверить самостоятельную работу соседа по парте по готовому шаблону, который выдаёт учитель. Оценку поставить в тетрадь и оценочный лист по критериям. Сообщённым учащимся перед самостоятельной работой.

**10. Итог урока, выставление оценок. 5 мин.**

За первый урок учащиеся получают оценку как среднее арифметическое оценок, полученных на каждом этапе урока. За второй урок учащиеся получают оценку за самостоятельную работу.

Домашняя работа	
Повторение теории	
Устная работа	
Тренировочные упражнения	
Работа в парах	
Итоговая оценка	
Самостоятельная работа	




Оценочный лист \_\_\_\_\_

Рефлексия:

**Цвето-рефлексия**

(самооценка совместной работы)

<i><b>В ходе работы я в группе ...</b></i>	<i><b>Самооценка</b></i>
Предлагал(а) новые идеи и направления работы	
Определял(а) цели, ставил задачи	
Ждал(а) помощи от участников группы	
Принимал(а) участие в совместной работе	
Задавал(а) вопросы, искал факты, спрашивал разъяснения	
Помогал(а) группе в выборе правильных решений	
Анализировал(а), обобщал точки зрения, делал	

ВЫВОДЫ	
Находил(а) и исправлял ошибки	
Оказывал(а) помощь, откликался на работу других	
Преодолевал(а) трудности, добивался достижения результата	
Осознавал(а) ответственность за общее дело	
<p><i>Условные обозначения</i></p> <p> Всегда       Иногда       Никогда</p>	